ΜΕΤΡΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

$B(\alpha,\varepsilon)=\{x\in\mathbb{R}^n : d(x,\alpha)<\varepsilon\}$

$d(x,y):=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}$

$d_1(x,y):=\max_i |x_i-y_i|$

$B_1(\alpha,\varepsilon)=\{x\in\mathbb{R}^n : d_1(x,a)<\varepsilon\}$

τοτε $\max_i |x_i-\alpha_i|<\varepsilon$:

$$: \left.\begin{array}{l} |x_1-a_1|<\varepsilon \\ |x_2-a_2|<\varepsilon \\ \vdots \\ |x_n-a_n|<\varepsilon \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} a_1-\varepsilon<x_1<a_1+\varepsilon \\ a_2-\varepsilon<x_2<a_2+\varepsilon \\ \vdots \\ a_n-\varepsilon<x_n<a_n+\varepsilon \end{array}\right\}$$

Αρα, $B_1(a,\varepsilon)=\bigtimes_{i=1}^{n}(a_i-\varepsilon,a_i+\varepsilon)$

Είναι,

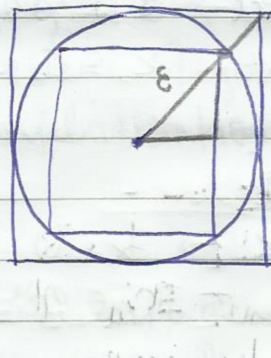
$$d_1(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,\dots,|x_n-y_n|\}=\sqrt{|x_k-y_k|^2}\leq$$

$$\leq\sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}=d(x,y)\leq\sqrt{n\cdot|x_k-y_k|^2}=$$

$$=\sqrt{n}\cdot|x_k-y_k|=\sqrt{n}\,d_1(x,y).$$

Δηλαδή, $d_1(x,y)\leq d(x,y)\leq\sqrt{n}\cdot d_1(x,y)$

ισοδύναμα, $\frac{1}{\sqrt{n}}d(x,y)\leq d_1(x,y)\leq d(x,y)$ ομοιομ. ισοδυναμ.



Έστω $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ και $b=(b_1,b_2,\dots,b_n)$

$(a,b)=\{x=(x_1,\dots,x_n) : a_j<x_j<b_j , j=1,\dots,n\}$

$B_1(a,\varepsilon):=(a-\varepsilon I, a+\varepsilon I)$, όπου $I=(1,1,\dots,1)$

Πρόταση 1

Έστω $[a,b]$ και $[c,d]$ ξένα, δηλαδή

$(a,b)\cap(c,d)=\emptyset$ και μάλιστα $[a,b]\cup[c,d]=$ διάστημα

Τότε $\exists$ (άξονας) k : $a_k\le b_k=c_k\le d_k$

ή $c_k\le d_k=a_k\le b_k$

$\forall i\neq k$: $[a_i,b_i]=[c_i,d_i]$

Αποδ

Έστω $(a_i,b_i)\cap(c_i,d_i)\neq\emptyset \rightarrow$

$\rightarrow \exists x_i : x_i\in(a_i,b_i)$ και $x_i\in(c_i,d_i) \rightarrow$

$\rightarrow x=(x_1,\dots,x_n)\in(a,b)\cap(c,d)$ $(=\emptyset)$ $\lightning$

Τότε $\exists k : (a_k,b_k)\cap(c_k,d_k)=\emptyset$

Εάν $\exists j : (a_j,b_j)\cap(c_j,b_j)=\emptyset$

$x_k\in(a_k,b_k)$ $i\neq k$

$x_i\in(c_i,d_i)$

$x=(x_1,\dots,x_n)\notin(a,b)$

Είδαμε την ακόλουθη πρόταση στο προηγούμενο μάθημα:

Πρόταση 2

K συμπαγές $\subseteq U$ ανοιχτό

Τότε $\exists I_1,I_2,\dots,I_k$ (ανοιχτά διαστήματα)

ώστε $K\subseteq I_1\cup\dots\cup I_k\subseteq \bar{I}_1\cup\dots\cup\bar{I}_k\subseteq U$

Αποδ

$x\in K\rightarrow x\in U\rightarrow\exists \underset{\in\mathbb{Q}}{\delta_x} : B_1(x,\delta_x)\subseteq U$

και $\exists y_x\in\mathbb{Q}^n$ τ/ω:

$d_1(x,y_x)<\frac{\delta_x}{2}$

$$\overline{B_1(y_x, \tfrac{\delta x}{2})} \subseteq B_1(x, \delta x) \subseteq U$$

$$w \in B_1(y_x, \tfrac{\delta x}{2}) \Rightarrow \begin{cases} d_1(w, y_x) < \dfrac{\delta x}{2} & (1) \\ d_1(x, y_x) < \dfrac{\delta x}{2} & (2) \end{cases}$$

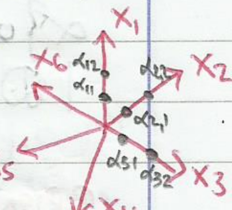
Αρα, $d_1(w, x) \leq d_1(w, y_x) + d_1(x, y_x) \underset{(2)}{\overset{(1)}{<}} \delta x$

Έτσι, $(\forall\, x \in U)(\exists \delta_x \in \mathbb{Q})(\exists y_x \in \mathbb{Q}^n) : B_1(y_x, \delta_x) \subseteq U$

Αρα, $U = \bigcup B_1(y_x, \tfrac{\delta x}{2}) \supseteq K$.

ΜΕΤΡΟ LEBESGUE :

Στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε n άξονες, $x_1'Ox_1$, $x_2'Ox_2$, ..., $x_n'Ox_n$ ή $x_i'Ox_i$, $i=1,2,\dots,n$ και σε κάθε άξονα παίρνουμε τα σημεία $a_{i,1} < a_{i,2} < \dots < a_{i,\lambda_i}$ και θεωρούμε σύνολο $P_{i,1} = \{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i = a_{i,1} \} =$



$= \{ (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, a_{i,1}, x_{i+1}, \dots, x_n) : x_k \in \mathbb{R}, k \neq i \}$

υπερεπίπεδο στον $\mathbb{R}^n$.

Έτσι, και το σύνολο

$P_{i,j} = \{ (x_1, \dots, x_{i-1}, a_{i,j}, x_{i+1}, \dots, x_n) : x_k \in \mathbb{R}, k \neq i \}$

υπερεπίπεδο $\forall j = 1, 2, \dots, \lambda_i$, $\forall$ άξονα $x_i'Ox_i$

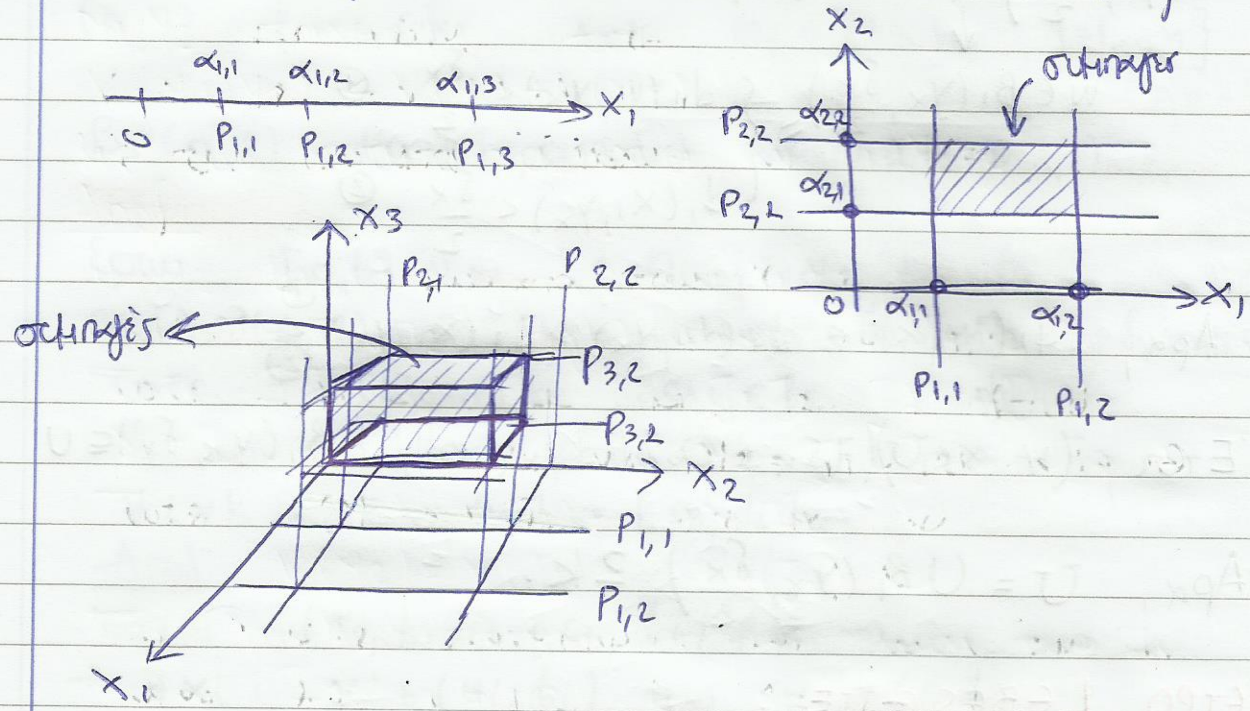
Το σύνολο όλων αυτών των υπερεπιπέδων λέγεται <u>κιγκλίδωμα</u> υπερεπιπέδων του $\mathbb{R}^n$. (συμβολίζουμε: Π)

<u>πχ</u>

$\mathbb{R}^1 \to$ πεπερ. σύνολο σημείων (Π = σύνολο σημείων)

$\mathbb{R}^2 \to$ -"- -"- ευθειών καθέτων στους άξονες

$\mathbb{R}^3 \to$ πεπερ. σύνολα επιπέδων καθέτων στους άξονες



Κλειστά διαστήματα στον $\mathbb{R}^n \to I = I_1 \times \dots \times I_n$

όπου $I_i = [\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}]$ ή $[\alpha_{i,2}, \alpha_{i,3}]$ ή ... ή $[\alpha_{i,\lambda_i-1}, \alpha_{i,\lambda_i}]$

τα λεγόμενα βασικά διαστήματα σε κάθε άξονα $x'ox_i$, πλήθους:

$|\mathcal{D}(\Pi)| = (\lambda_1 - 1)\cdots(\lambda_n - 1)$

ΟΡΙΣΜΟΣ

$I := [a, b]$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$

στον $\mathbb{R}^n$. Μέτρο Lebesgue - χωρητικότητα

$V(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cdots(b_n - a_n)$

$n = 1 \to$ μήκος

$n = 2 \to$ εμβαδό

$n = 3 \to$ όγκος.

Πρόταση

I_1, I_2 διαστήματα στον $\mathbb{R}^n$ ξένα με την έννοια

ότι $I_1^\circ \cap I_2^\circ = \emptyset$ και $I := I_1 \cup I_2$ = διάστημα

τότε $V(I) = V(I_1) + V(I_2)$

Αποδ

Έστω ότι το $I_1 = [a, b]$ και $I_2 = [c, d]$ με
$a := (a_1, \dots, a_n)$, $b := (b_1, \dots, b_n)$, $c := (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$
και $d := (\delta_1, \dots, \delta_n)$. Τότε, από την Πρότ. 1
$\exists k \in \{1, 2, \dots, n\}$: $[a_i, b_i] = [\gamma_i, d_i]$, $i \neq k$ και
$a_k < b_k = \gamma_k < \delta_k$ ή $\gamma_k < \delta_k = a_k < b_k$.
Τουτέστιν, ισχύει:
$b_i - a_i = \delta_i - \gamma_i$, $i \neq k$ και $b_k - a_k + \delta_k - \gamma_k = \delta_k - a_k$ ①
ή $b_k - a_k + \delta_k - \gamma_k = b_k - \gamma_k$ ②
Έστω ότι ισχύει η σχέση ① (η ② λύνεται όμοια με την ①)

$$V(I_1) + V(I_2) = (b_1 - a_1) \dots (b_{k-1} - a_{k-1})(b_k - a_k)(b_{k+1} - a_{k+1}) \dots (b_n - a_n) + (\delta_1 - \gamma_1) \dots (\delta_{k-1} - \gamma_{k-1})(\delta_k - \gamma_k)(\delta_{k+1} - \gamma_{k+1}) \dots (\delta_n - \gamma_n) \overset{①}{=}$$
$$= (b_1 - a_1) \dots (b_{k-1} - a_{k-1})(\delta_k - a_k)(b_{k+1} - a_{k+1}) \dots (b_n - a_n) =$$
$$= V(I_1 \cup I_2).$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω Π κιγκλίδωμα στον $\mathbb{R}^n$. Το σύνολο $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται στοιχειώδες, αν $\exists I_1, I_2, \dots, I_k \in \mathcal{D}(\Pi)$ βασικά διαστήματα (ξένα ανά δύο, εδώ $I_i^\circ \cap I_j^\circ = \emptyset$, $i \neq j$) με $Y = I_1 \cup \dots \cup I_k$ τότε το Y χαρακτηρίζει το Y ως στοιχειώδες σύνολο.

$$V_\Pi(Y) = V(I_1) + V(I_2) + \dots + V(I_k)$$

$V_\Pi(Y)$: δεν εξαρτάται από το κιγκλίδωμα Π

χωρητικότητα του Y συνόλου (ή μέτρο Lebesgue του Y συνόλου)

Παρατήρηση: $Y_1 \subseteq Y_2$ δύο στοιχειώδη σύνολα, τότε $V(Y_1) \leq V(Y_2)$

Προταση

Y_1, Y_2 στοιχειώδη, τότε

$V(Y_1 \cup Y_2) \leq V(Y_1) + V(Y_2)$

με την ισοτητα να ισχυει αν $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$

Αποδ

Π_1, Π_2 κιγκλιδωματα των Y_1, Y_2

και $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$ κιγκλιδωμα των Y_1, Y_2

Τοτε $\exists\, I_1, I_2, \dots, I_k$ και $J_1, J_2, \dots J_\lambda \in \mathcal{D}(\Pi)$

$Y_1 = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_k$ και $Y_2 = J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_\lambda$ (1)

Τοτε $V(Y_1) = V(I_1) + \dots + V(I_k)$ (2)

$V(Y_2) = V(J_1) + \dots + V(J_\lambda)$ (3)

Το $Y_1 \cup Y_2$ στοιχειώδες, ως ενωση των I_i και I_j, $i = 1, 2, \dots, k$, $j = 1, 2, \dots, \lambda$

Καποια απο τα I_i θα ταυτιζονται με καποια απο τα I_j, $\forall i, j$.

Αρα, απο (1), (2), (3) $\to V(Y_1 \cup Y_2) \leq V(Y_1) + V(Y_2)$

Αν τωρα $Y_1 \cap Y_2 = 0 \to \{I_1, \dots, I_k\} \cap \{J_1, \dots, J_\lambda\} = \emptyset$

ισχυει ισοτητα

Αν θεωρήσουμε G ανοιχτο $\subseteq \mathbb{R}^n$

τοτε μπορούμε να βρουμε $I \subseteq G$ διαστημα

και αφου I στοιχειώδες $\to$

$\to \{Y \subseteq G : Y \text{ στοιχειωδες}\} \neq \emptyset$

Ορίζουμε λοιπον (αλλιώς) το μέτρο Lebesgue

$V(G) = \sup\{V(Y) : Y \subseteq G,\ Y \text{ στοιχ.}\}$

Εμφανες, είναι η αν G_1, G_2 ανοιχτα $\subseteq \mathbb{R}^n$

$G_1 \subseteq G_2$ τοτε

$\{V(Y) : Y \in \sigma_{\alpha i}\} \subseteq \{V(Y) : Y \in \sigma_{\alpha 2}\} \to V(G_1) \leq V(G_2)$

οπου σ : συλλογή στοιχειωδων συνόλων